DURÉE : 4 heures

NOTATIONS : *On utilise les notations suivantes :*

E : *espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle fermé borné* $[0, \pi]$.

F : *espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles π-périodiques sur* $\mathbb{R}$.

F' : *sous-espace vectoriel de* F *constitué des fonctions de* F *qui sont indéfiniment dérivables dans* $\mathbb{R}$.

On étudie l'application $\mathcal{H}$ *qui, à tout élément* f *de* E, *fait correspondre la fonction* $g = \mathcal{H}(f)$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$g(x) = \int_0^{\pi} | \sin(x - t) | f(t)\, dt.$$

PREMIÈRE PARTIE

1° Montrer que $\mathcal{H}$ est une application linéaire de E dans F.

2° Déterminer les images par $\mathcal{H}$ des fonctions suivantes définies pour $x \in [0, \pi]$ par :

$$f_1(x) = 1$$
$$f_2(x) = x$$
$$f_3(x) = \sin \alpha x \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ donné}$$
$$f_4(x) = \cos \alpha x$$
$$f_5(x) = x \sin x$$
$$f_6(x) = x \cos x$$

Pour cela, on fera d'abord des calculs de primitives, puis on pourra scinder en deux l'intervalle d'intégration.

Que peut-on dire des fonctions $x \to 1$; $x \to \sin 2x$; $x \to \cos 2x$?

3° *a.* On note $\tilde{g}$ la restriction de g à l'intervalle $[0, \pi]$. Montrer que $\tilde{g}$ est deux fois continûment dérivable (au point 0 (respectivement π) la dérivée considérée est la dérivée à droite (respectivement la dérivée à gauche)).

b. Montrer que $\tilde{g}$ est solution sur $[0, \pi]$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants faisant intervenir f de façon simple.

c. *Application.* — Vérifier les résultats obtenus dans la seconde question.

d. Montrer que g est une fonction continûment dérivable. A quelle condition portant sur f, cette fonction g est-elle deux fois continûment dérivable ?

e. L'application linéaire $\mathcal{H}$ de E dans F est-elle injective? surjective?

4° On désigne par $\mathcal{R}$ l'application qui associe à toute fonction g de F' sa restriction $\tilde{g}$ à $[0, \pi]$ et on considère l'application :

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \circ \mathcal{R}.$$

a. Montrer que $\mathcal{K}$ est un endomorphisme bijectif de F'. Déterminer $\mathcal{K}^{-1}$.

b. On propose de montrer que $\mathcal{K}$ admet des vecteurs propres (autrement dit des fonctions propres). Montrer que ces fonctions propres, si elles existent, sont des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Montrer ensuite que $\mathcal{K}$ admet une infinité de valeurs propres constituant une suite (λ_n) que l'on déterminera. Quels sont les sous-espaces propres associés et leurs dimensions?

.../...

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, E est toujours l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, \pi]$. E' désignera le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions f de E deux fois continûment dérivables et telles que $f(0) = f(\pi)$, $f'(0) = f'(\pi)$. On considère maintenant l'application $\mathfrak{L}$ qui associe à toute fonction f de E, la fonction g_1 *définie sur* $[0, \pi]$ par :

$$g_1(x) = \int_0^\pi | \sin(x - t) | f(t)\, dt.$$

On se propose de déterminer les applications $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L}^2 = \mathfrak{L}^3$ et de caractériser les images de ces puissances de $\mathfrak{L}$.

1° Montrer que, pour tout élément f de E, l'image $g_1 = \mathfrak{L}(f)$ est un élément de E'. L'application $\mathfrak{L}$, ainsi définie, de E vers E' est-elle bijective?

2° *a.* Montrer que si l'on pose $g_2 = \mathfrak{L}^2(f)$ où f est une fonction donnée de E, on a :

$$\forall x \in [0, \pi] \qquad g_2(x) = \int_0^\pi G(x - u)\, f(u)\, du$$

où G s'exprime simplement à l'aide de $\mathfrak{H}$ et d'une fonction simple de E.

b. Déterminer explicitement la fonction G (on pourra se servir des résultats de la question I.2°).

c. Montrer que la fonction g_2 est quatre fois continûment dérivable, qu'elle est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants et à second membre dépendant de f et qu'elle vérifie 4 conditions simples faisant intervenir g_2 et ses trois premières dérivées.

d. Inversement, soit h, une fonction quatre fois continûment dérivable sur $[0, \pi]$, vérifiant les quatre conditions précédentes et solution de l'équation différentielle à second membre g continu sur $[0, \pi]$. Existe-t-il une fonction f appartenant à E telle que $\mathfrak{L}^2(f) = h$?

3° Soit $f \in E$ et $g_3 = \mathfrak{L}^3(f)$:

a. Montrer que g_3 s'exprime par : $g_3(x) = \int_0^\pi H(x - u)\, f(u)\, du$ où H est une fonction que l'on définira à l'aide de $\mathfrak{H}$ et de la fonction G précédente.

b. Calculer H.

c. Montrer que g_3 a des propriétés analogues à celles de g_2. Quelle est l'image de $\mathfrak{L}^3$?

4° n étant un entier naturel donné > 1 ainsi qu'une fonction continue f sur $[0, \pi]$, on considère le problème suivant :

Trouver une fonction X définie sur $[0, \pi]$ et telle que :

a. X est $2n$ fois continûment dérivable sur $[0, \pi]$

b. $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, X^{(2p)}(x) = 2^n f(x) \qquad \forall x \in [0, \pi]$

c. $X^{(k)}(0) = X^{(k)}(\pi) \quad \forall k = 0, 1, \ldots, 2n - 1.$

Montrer que ce problème admet une solution unique qui peut s'exprimer simplement à l'aide de l'application $\mathfrak{L}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail